

Научная статья

1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки)

УДК 539.22

doi: 10.25712/ASTU.1811-1416.2026.01.011

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭНЕРГИИ В КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ β -ФПУЦ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ДВИЖУЩИХСЯ ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРОВ

**Дарья Михайловна Наумова¹, Евгений Константинович Наумов¹,
Дилмурод Собир углы Холмуродов², Сергей Владимирович Дмитриев³**

¹Институт физики молекул и кристаллов, Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, пр. Октября, 71, 450054, Уфа, Россия

²Каршинский государственный университет, ул. Кучабаг, 17, 180119, Карши, Узбекистан

³Институт математики с вычислительным центром, Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, пр. Октября, 71, 450054, Уфа, Россия

¹naumova.darya.m@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6569-243X>

²naumovek@kristallcom.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0320-2797>

³dilmu.xolmu@mail.ru

⁴dmitriev.sergey.v@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6744-4445>

Аннотация. Интерес к нелинейным колебаниям решетки вызван, с одной стороны, наличием в природе и технике периодических в пространстве дискретных систем, а с другой стороны тем, что во многих областях применения они могут подвергаться высокоамплитудным воздействиям, когда начинает проявляться нелинейная природа связей между частицами. Важным эффектом нелинейности в дискретных периодических структурах является возможность существования пространственно локализованных колебаний большой амплитуды, которые получили название "дискретные бризеры" (ДБ) (или внутренние локализованные моды). Колебания, локализованные на дефектах, могут быть реализованы и в случае линейных взаимодействий, однако ДБ существуют в бездефектных решетках, но только за счет их нелинейности. В работе представлено компьютерное моделирование столкновения движущихся ДБ, которые испускаются от двух пар колеблющихся атомов, находящихся в плотноупакованных рядах в квадратной решетке с потенциалом -ФПУЦ (Ферми-Паста-Улама-Цингу). Две пары вынужденно колеблющихся атомов могут находиться в одном плотноупакованном ряду или со сдвигом на несколько рядов. В первом случае наблюдаются лобовые столкновения ДБ, в других случаях ДБ взаимодействуют, двигаясь в параллельных плотноупакованных рядах. Описаны основные сценарии сталкивающихся движущихся ДБ в такой решетке, а также проведен расчёт максимальной энергии решетки в момент столкновения ДБ. При проведении вышеописанных расчетов удалось показать, что взаимодействующие ДБ повышают максимальную энергию атомов в системе в зоне их столкновения. Повышенная энергия атомов, наблюдаемая при столкновении ДБ, может облегчать преодоление потенциальных барьеров, связанных со структурными перестройками.

Ключевые слова: дискретные бризеры, квадратная решетка, сценарии столкновения, максимальная энергия решетки, колеблющаяся пара атомов, потенциал Ферми-Паста-Улама-Цингу

Благодарности: Работа Дмитриева С.В. выполнена в рамках Государственного задания Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН.

Для цитирования: Наумова Д.М., Наумов Е.К., Холмуродов Д.С., Дмитриев С.В. О локализации энергии в квадратной решетке β -ФПУЦ при столкновении движущихся дискретных бризеров // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. 2026. Т. 23, № 1. С. 96-105. doi: 10.25712/ASTU.1811-1416.2026.01.011.

Original article

ON ENERGY LOCALIZATION IN THE β -FPUT SQUARE LATTICE DURING COLLISIONS OF MOVING DISCRETE BREATHERS

Darya M. Naumova¹, Evgeny K. Naumov¹, Dilmurod S. Kholmurodov², Sergey V. Dmitriev³

¹ Institute of Molecule and Crystal Physics, Ufa Federal Research Centre of RAS, Oktyabrya Pr., 71, Ufa, 450054, Russia

² Karshi State University, Kuchabag St., 17, 180119, Karshi, Uzbekistan

³ Institute of Mathematics with computing center, Ufa Federal Research Centre of RAS, Oktyabrya Pr., 71, Ufa, 450054, Russia

¹naumova.darya.m@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6569-243X>

²naumovek@kristallcom.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0320-2797>

³dilmu.xolmu@mail.ru

⁴dmitriev.sergey.v@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6744-4445>

Abstract. Interest in nonlinear lattice vibrations is driven, on the one hand, by the existence of spatially periodic discrete systems in nature and technology, and on the other hand, by the fact that in many applications they can be subjected to high-amplitude impacts, which reveal the nonlinear nature of interparticle couplings. An important effect of nonlinearity in discrete periodic structures is the possibility of the existence of spatially localized oscillations of large amplitude, which are called "discrete breathers" (DBs) (or intrinsic localized modes). Oscillations localized at defects can also be realized in the case of linear interactions, but DBs exist in defect-free lattices, but only due to their nonlinearity. This paper presents a computer simulation of the collision of moving DBs emitted by two pairs of oscillating atoms located in the close-packed rows in a square lattice with a Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou (FPU) potential. Two pairs of forced oscillating atoms can be located in the same close-packed row or shifted by several rows. In the first case, head-on collisions of discrete breathers are observed; in other cases, discrete breathers interact while moving in parallel close-packed rows. The main scenarios for colliding moving discrete breathers in such a lattice are described, and the maximum lattice energy at the moment of discrete breather collision is calculated. The calculations described above demonstrated that interacting discrete breathers increase the maximum energy of atoms in the system in the collision zone. The increased atomic energy observed during discrete breather collisions can facilitate overcoming potential barriers associated with structural rearrangements.

Keywords: discrete breathers, square lattice, collision scenarios, maximum lattice energy, vibrating pair of atoms, Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou potential

Acknowledgements: The work of S.V. Dmitriev was carried out within the framework of the State assignment of the Institute of Mathematics with the Computing Center of the Ufa Federal Research Center of RAS.

For citation: Naumova D.M., Naumov E.K., Kholmurodov D.S., Dmitriev S.V. (2026). On energy localization in the β -FPUT square lattice during collisions of moving discrete breathers. *Fundamental'nye problemy sovremennogo materialovedeniya (Basic Problems of Material Science (BPMS))*, 23(1), 96-105. (In Russ.). doi: 10.25712/ASTU.1811-1416.2026.01.011.

Введение

Интерес к нелинейным колебаниям решетки возрос в последние десятилетия после открытия возможности существования локализованных в пространстве колебаний большой амплитуды, называемых дискретными бризерами (ДБ) [1–6]. Для существования ДБ необходимы два условия - дискретность и нелинейность среды. Дискретность обеспечивает ограниченность спектра малоамплитудных колебаний решетки, а нелинейность даёт возможность частоте колебаний ДБ выйти из этого спектра. Колебаясь на частоте вне спектра малоамплитудных колебаний, ДБ не затрачивает свою

энергию на их возбуждение и, теоретически, в отсутствии возмущений, может существовать вечно.

На ДБ может быть локализована энергия порядка нескольких эВ [7], кроме того, перемещаясь по кристаллической решетке, ДБ способны транспортировать её [8–20]. Эта локализованная энергия может привести к модификации дефектов [21], помочь в преодолении порога миграции дефектов [22, 23] или понизить потенциальный барьер испарения атома с поверхности кристалла [24]. ДБ способны аккумулировать и переносить электрический заряд, что объясняет появление электрического тока в кристаллах, не имеющих свободных зарядов

[25–28]. Важно, что названные выше эффекты нелинейности являются общими и проявляются в нелинейных решетках любой размерности, хотя имеются определённые аспекты, связанные с размерностью решетки. Это говорит о возможности изучения многих эффектов нелинейности на примере относительно простых решеток, где физическая суть явления проявляется наиболее ярко.

Большую роль в физике конденсированного состояния и в физике нелинейных явлений сыграли двумерные решетки. Квадратная решетка использовалась для изучения ферромагнетизма [29], при изучении нелинейных возбуждений в кристалле слюды [30], нелинейной локализации энергии в фотонных кристаллах [31].

Данная работа является продолжением работы [32] и методика моделирования процессов полностью совпадает с представленной в этой работе.

Отметим работы [33–36], где методом молекулярной динамики и теоретико-группового анализа изучаются условия существования различных типов дискретных бризеров в ОЦК-решётке дальнедействующими межатомными взаимодействиями и обсуждается вопрос выбора потенциала, что концептуально близко к рассматриваемой в работе проблеме локализации энергии в дискретных нелинейных решетках.

Цель и задачи работы

Цель проведенной работы заключается в изучении сталкивающихся движущихся ДБ в квадратной решетке с дальнедействующим потенциалом β -ФПУЦ.

Задачами же такого исследования являются:

1. Описание различных сценариев столкновения движущихся ДБ. В ходе проведенного исследования рассматривались различные сценарии столкновения движущихся ДБ, испускаемых от двух разных пар колеблющихся атомов, находящихся в одном плотноупакованном ряду решетки на некотором расстоянии друг от друга, а также со смещением колеблющихся пар в соседние атомные ряды.

Расчёт максимальной энергии решетки в момент столкновения ДБ, испускаемых двумя парами колеблющихся атомов, находящихся в

одном плотноупакованном ряду решетки на некотором расстоянии друг от друга.

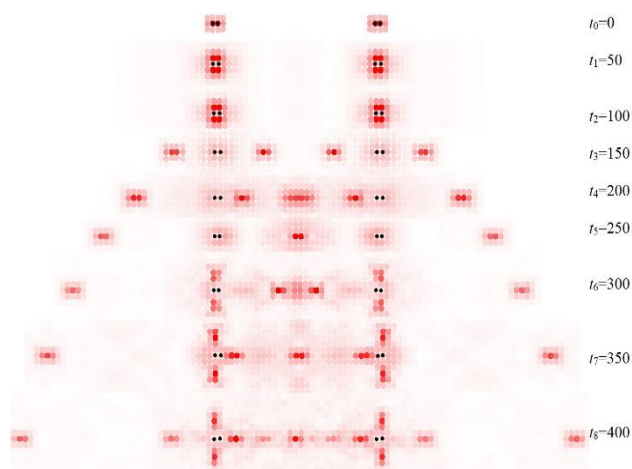


Рис. 1. Сценарий столкновения движущихся ДБ, в котором колеблющиеся пары атомов находятся в одном плотноупакованном ряду решетки на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга.

Fig. 1. Scenario of a collision of moving DBs, in which the vibrating pairs of atoms are located in one close-packed row of the lattice at a distance of 30 interatomic distances from each other.

Основные сценарии сталкивающихся движущихся ДБ в квадратной решетке с дальнедействующим потенциалом β -ФПУЦ

На Рис. 1 представлен сценарий, в котором колеблющиеся пары атомов находятся в одном плотноупакованном ряду решетки на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга. Движущиеся ДБ, испускаемые от колеблющихся пар, следуют навстречу друг к другу, что приводит к их столкновению. Параметры вынужденных колебаний соответствуют следующим значениям: амплитуда $A=0,07$, частота $\omega=1,006\omega_{\max}$, начальный момент времени $t_0=0$, шаг по времени $\Delta t=50$. Атомы, совершающие вынужденные колебания, показаны черным, остальные атомы – градацией цвета от белого (нулевая полная энергия атома) до красного (максимальная по всем атомам энергия).

Тогда для представленного Рис. 1 верно, что движущиеся ДБ начинают испускаться при моменте времени $t_3=150$, позже столкнувшись при $t_3=200$ их энергии сливаются посередине между парами вынужденно колеблющихся атомов. Интерес вызывает так же тот факт, что энергии, сливавшиеся посередине между пара-

ми вынужденно колеблющихся атомов так или иначе взаимодействуют до конца проведенного нами исследования. Так же примечателен тот факт, что в момент времени равный $t_6=300$, под действием поля энергии другой колеблющейся пары на каждой из рассматриваемых нами колеблющихся пар происходит эффект испускания ДБ новой симметрии, которые раньше не наблюдались при рассмотрении подобных моделей, а именно - горизонтальных ДБ.

На Рис. 2 представлен сценарий столкновения движущихся ДБ, в котором колеблющиеся пары атомов, расположены со смещением на один горизонтальный ряд решетки и на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга. Параметры вынужденных колебаний соответствуют приведенным к Рис. 1, за исключением шага по времени, который равен $\Delta t=60$.

Из Рис. 2 видно, что движущиеся ДБ начинают излучаться в момент времени $t_2=120$, а затем, столкнувшись при $t_3=180$, формируют локализованную область повышенной энергии в середине между парами вынужденно колеблющихся атомов. После столкновения наблюдается длительное взаимодействие слитых ДБ с повышенной энергией, сохраняющееся вплоть до завершения расчёта. Особый интерес представляет момент времени $t_4=240$, когда под действием энергетического поля, создаваемого ДБ, излучёнными другой вынужденно колеблющейся парой, происходит генерация ранее не наблюдавшихся в данной модели диагональных ДБ, отличающихся иной симметрией.

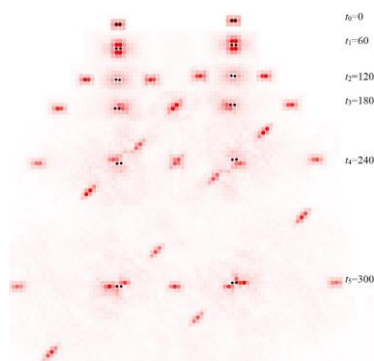


Рис. 2. Сценарий столкновения движущихся ДБ, в котором колеблющиеся пары атомов расположены со смещением на один горизонтальный ряд решетки и на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга.

Fig. 2. A collision scenario of moving DBs in which the vibrating pairs of atoms are located with a shift of one horizontal row of the lattice and at a distance of 30 interatomic distances from each other.

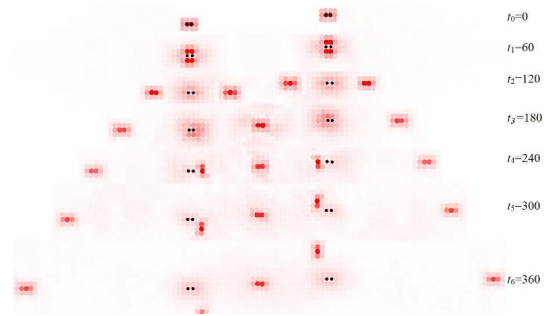


Рис. 3. Сценарий столкновения движущихся ДБ, в котором колеблющиеся пары атомов, расположены со смещением на два горизонтальных ряда решетки и на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга

Fig. 3. A collision scenario of moving databases is considered, in which vibrating pairs of atoms are located with a shift of two horizontal rows of the lattice and at a distance of 30 interatomic distances from each other.

На Рис. 3 представлен сценарий столкновения движущихся ДБ, в котором колеблющиеся пары атомов, расположены со смещением на один горизонтальный ряд решетки и на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга. Параметры вынужденных колебаний соответствуют приведенным к Рис. 1, за исключением шага по времени, который равен $\Delta t=60$.

Тогда для представленного Рис. 3 верно, что движущиеся ДБ начинают испускаться при моменте времени $t_2=120$, позже столкнувшись при $t_3=180$ их энергии сливаются посередине между парами вынужденно колеблющихся атомов. Как и ранее заметно, что энергии, сливавшиеся посередине между парами вынужденно колеблющихся атомов так или иначе взаимодействуют до конца проведенного нами исследования. Так же примечателен тот факт, что в момент времени равный $t_4=240$ под действием поля энергии другой колеблющейся пары на каждой из рассматриваемых нами колеблющихся пар происходит эффект испускания ДБ направленных горизонтально, но в отличии от Рис. 1 лишь в одном направлении.

В сценариях столкновения, когда движущиеся ДБ испускаются от пары атомов расположенных со смещением на три и больше горизонтальных рядов решетки и на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга наблюдается следующее. ДБ проходят друг рядом с другом, не взаимодействуя между собой, однако под действием поля энергии другой колеблющейся пары на каждой из рассматриваемых

нами колеблющихся пар теряется симметрия испускания движущихся ДБ. Результатом потери симметрии становится испускание хаотичных движущихся ДБ. Для большего понимания картины, описанного нами взаимодействия представим сценарий столкновения, движущихся ДБ испускающихся от пары атомов, расположенных со смещением на тридцать горизонтальных рядов решетки и на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга. Такой сценарий представлен на Рис. 4.

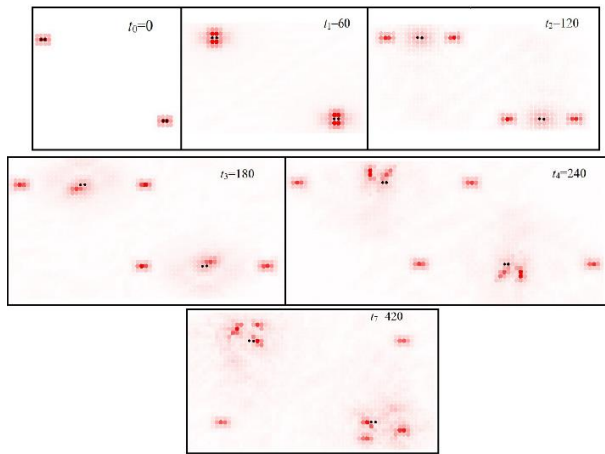


Рис. 4. Сценарий столкновения движущихся ДБ, в котором колеблющиеся пары атомов, расположены со смещением на два горизонтальный ряд решетки и на расстоянии 30 межатомных расстояний друг от друга.

Fig. 4. A collision scenario of moving DBs in which oscillating pairs of atoms are displaced by thirty horizontal rows of the lattice and are 30 interatomic distances apart.

Тогда для представленного на Рис. 4 случая верно, что движущиеся ДБ начинают испускаться в момент времени $t_2=120$, а позже, при $t_3=180$, испущенные ДБ проходят параллельно друг другу не взаимодействуя. При $t_4=240$ наблюдается эффект, в котором на каждую рассматриваемую колеблющуюся пару начинает оказывать действие излучение мало-амплитудных волн от другой колеблющейся пары. Результатом такого влияния становится окончательная потеря симметрии испускающихся ДБ при $t_7=420$, как относительно самой пары колеблющихся атомов, так и относительно двух пар, задействованных в исследовании.

Расчёт максимальной энергии атомов решетки в момент столкновения ДБ

Изучим эволюцию максимальной по всем атомам энергии $e_{\max}$ для случая, когда две пары атомов, совершающих вынужденные колебания, находятся в одном атомном ряду на расстоянии 20 межатомных расстояний друг от друга. Выберем следующие параметры вынужденных колебаний: амплитуда $A=0,09$ и частота $\omega=1,017\omega_{\max}$. На Рис. 5 показана зависимость $e_{\max}$ от времени t . На Рис. 6 показан транспорт энергии от атомов, совершающих вынужденные колебания, в решетку. Атомы, совершающие вынужденные колебания, показаны черным, остальные атомы – градацией цвета от белого (нулевая полная энергия атома) до красного (максимальная по всем атомам энергия).

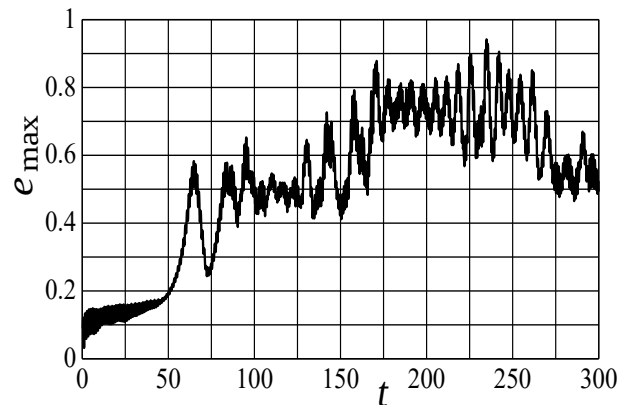


Рис. 5. Зависимость максимальной по всем атомам энергии $e_{\max}$ от времени.

Fig. 5. Dependence of the maximum over all atoms energy $e_{\max}$ on time.

Как видно из Рис. 5, $e_{\max}$ сначала растет, а затем начинает осциллировать на уровне энергии примерно равной 0,5, и осцилляции на этом уровне продолжаются примерно до $t=125$. Далее опять наблюдается рост максимальной энергии атомов и выход на новый уровень максимальной энергии, равной примерно 0,75. Начиная с $t=250$, максимальная энергия в системе начинает падать.

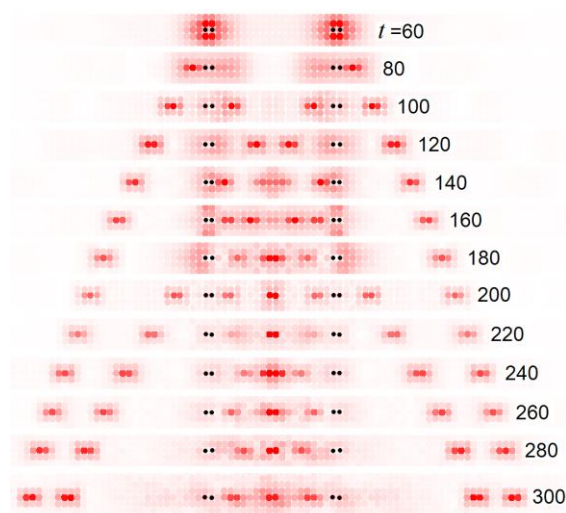


Рис. 6. Транспорт энергии в решетке от двух пар атомов, совершающих вынужденные колебания по гармоническому закону с амплитудой $A=0,09$ и частотой $\omega=1,017\omega_{max}$. Атомы, совершающие вынужденные колебания, показаны черным, остальные атомы – градацией цвета от белого (нулевая полная энергия) до красного (максимальная по всем атомам энергия).

Fig. 6. Energy transport in the lattice from two pairs of atoms undergoing forced oscillations according to a harmonic law with an amplitude of $A=0.09$ and a frequency of $\omega=1.017\omega_{max}$. The atoms undergoing forced oscillations are shown in black, while the remaining atoms are colored from white (zero total energy) to red (maximum energy among all atoms).

Как видно из Рис. 6, e_{max} сначала растет, а затем начинает осциллировать на уровне энергии примерно равной 0,5, и осцилляции на этом уровне продолжаются примерно до $t=125$. Далее опять наблюдается рост максимальной энергии атомов и выход на новый уровень максимальной энергии, равной примерно 0,75. Начиная с $t=250$, максимальная энергия в системе начинает падать. Такое изменение максимальной энергии во времени можно объяснить глядя на Рис. 6. Уровень энергии $e_{max} = 0,5$ соответствует ситуации, когда в системе движутся невзаимодействующие ДБ. Первая пара ДБ образуется при $t=80$, они разбегаются влево и вправо от пар атомов, совершающих вынужденные колебания. Вторая пара ДБ образуется при $t=100$, причем, эти ДБ движутся навстречу друг другу между парами вынужденно колеблющихся атомов. Эти атомы встречаются примерно при $t=140$, когда на Рис. 6 отмечается рост максимальной энергии. Далее происходит

испускание ДБ как в стороны от вынужденно колеблющихся атомов, так и в пространство между ними. Все большее число ДБ начинает сливаться посередине между парами вынужденно колеблющихся атомов, что приводит к выходу максимальной энергии на уровень 0,75. При $t > 250$ испускание энергии от вынужденно движущихся атомов теряет симметрию и ДБ начинают рассеивать свою энергию, что приводит к понижению e_{max} . Таким образом, можно сделать вывод, что взаимодействующие ДБ повышают максимальную энергию атомов в системе.

Заключение

В соответствии с целью работы проведено изучение сталкивающихся движущихся ДБ в квадратной решетке с дальнедействующим потенциалом β -ФПУЦ. Результаты исследования приведены ниже:

1. Описаны основные сценарии столкновения движущихся ДБ. Исходя из анализа таких сценариев можно заключить, что результатом столкновения движущихся ДБ является образование ДБ новых симметрий ранее не наблюдавшихся в рассмотренной модели. Так же необходимо отметить влияние малоамплитудных волн, исходящих от колеблющейся пары, которые со временем начинают оказывать действие на другие колеблющиеся пары. Результатом такого влияния является потеря симметрии испускающихся ДБ, как относительно самой пары колеблющихся атомов, так и относительно других пар.

Проведен расчёт максимальной энергии решетки в момент столкновения ДБ, испускаемых двумя парами колеблющихся атомов, находящихся в одном плотноупакованном ряду решетки на расстоянии 20 межатомных расстояний друг от друга. При проведении такого расчета удалось показать, что взаимодействующие ДБ повышают максимальную энергию атомов в системе в зоне их столкновения. Напомним, что расчет проведен на базе модели с дальнедействующим потенциалом β -ФПУЦ. Таким образом, исходя из представленных нами сценариев столкновения движущихся ДБ и на основе утверждения о том, что ДБ повышают максимальную энергию атомов в системе в зоне их столкновения, заключаем, что в дальнейших работах необходимо провести рассмот-

рение сценариев столкновения движущихся ДБ от пары колеблющихся атомов на базе модели с дальнедействующим потенциалом Морзе. Результатом столкновения ДБ в решетке Морзе может стать появление дефектов решетки, например, пар Френкеля – вакансии-междоузлия.

Список литературы

1. Dolgov A. S. On localization of oscillations in nonlinear crystal structure / A. S. Dolgov // *Sov. Phys. Solid State*. – 1986. – т. 28. – с. 907.
2. Sievers A. J. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals / A. J. Sievers, S. Takeno // *Physical Review Letters*. – 1988. – т. 61, № 8. – с. 970-973.
3. Flach S. Discrete breathers - Advances in theory and applications / S. Flach, A. V. Gorbach // *Physics Reports*. – 2008. – т. 467, № 1. – с. 1-116.
4. Discrete breathers in crystals / S. V. Dmitriev, E. A. Korznikova, J. A. Baimova, M. G. Velarde // *Physics-Uspekhi*. – 2016. – т. 59, № 5. – с. 446-461
5. Page J. B. Asymptotic solutions for localized vibrational modes in strongly anharmonic periodic systems / J. B. Page // *Phys. Rev. B*. – 1990. – т. 41, № 11. – с. 7835-7838.
6. Flach S. Discrete breathers / S. Flach, C. R. Willis // *Physics Reports*. – 1998. – т. 295, № 5. – с. 181-264.
7. Dubinko V. I. Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity / V. I. Dubinko, P. A. Selyshchev, J. F. Archilla // *Phys. Rev. E*. – 2011. – т. 83. – с. 041124.
8. Kistanov A. A. Properties of moving discrete breathers in a monoatomic two-dimensional crystal / A. A. Kistanov, A. S. Semenov, S. V. Dmitriev // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 2014. – т. 119, № 4. – с. 766-771.
9. Moving discrete breathers in bcc metals V, Fe and W / R. T. Murzaev, A. A. Kistanov, V. I. Dubinko, D. A. Terentyev, S. V. Dmitriev // *Comp. Mater. Sci*. – 2015. – т. 98. – с. 88.
10. Marin J. L. Localized moving breathers in a 2D hexagonal lattice / J. L. Marin, J. C. Eilbeck, F. M. Russell // *Phys. Lett. A*. – 1998. – т. 248, № 2-4. – с. 225-229.
11. Properties of moving discrete breathers in beryllium / O. V. Bachurina, R. T. Murzaev, A. S. Semenov, E. A. Korznikova, S. V. Dmitriev // *Phys. Solid State*. – 2018. – т. 60. – с. 989.
12. Кистанов А.А., Семенов А.С., Дмитриев С.В. О задании начальных условий для моделирования движущихся дискретных бризеров в моноатомном двумерном кристалле // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2014. – Т. 11. – № 2. – С. 223-227.
13. Кистанов А.А., Семенов А.С. Столкновение движущихся дискретных бризеров в двумерном моноатомном кристалле // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2014. – Т. 11. – № 2. – С. 241-244.
14. Кистанов А.А., Семенов А.С., Мурзаев Р.Т., Дмитриев С.В. Неподвижные и движущиеся дискретные бризеры в ГПУ металле Со // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2014. – Т. 11. – № 3. – С. 322-325.
15. Кистанов А.А., Семенов А.С., Мурзаев Р.Т., Дмитриев С.В. Взаимодействие движущихся дискретных бризеров в ГПУ металле Mg // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2014. – Т. 11. – № 4-2. – С. 572-577.
16. Семенов А.С., Корзникова Е.А., Дмитриев С.В. Дискретные бризеры с жестким и мягким типом нелинейности в одномерной цепочке с дальнедействующим морзевским взаимодействием // *Письма о материалах*. – 2015. – Т. 5. – № 1 (17). – С. 11-14.
17. Семёнова М.Н., Семёнов А.С., Бебихов Ю.В., Рябов Д.С., Чечин Г.М., Рахматуллина Ж.Г., Корзникова Е.А., Дмитриев С.В. Некоторые характеристики одномерных делокализованных нелинейных колебательных мод треугольной решетки с морзевским взаимодействием // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2018. – Т. 15. – № 2. – С. 257-264.
18. Smenov A.S., Bebikhov Yu.V., Kistanov A.A. Simulation of energy transport in crystal with NaCl structure assisted by discrete breathers // *Letters on Materials*. – 2017. – Т. 7. – № 2 (26). – С. 77-80.
19. Семенов А.С., Фомин С.Ю., Жоу К., Соболева Э.Г. Дискретный бризер с жестким типом нелинейности в двумерном биатомном кристалле // *Письма о материалах*. – 2017. – Т. 7. – № 3 (27). – С. 327-331.
20. Семенов А.С., Мурзаев Р.Т., Кистанов А.А., Бебихов Ю.В. Исследование дискретных бризеров в ГПУ металлах бериллии и цирконии // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2015. – Т. 12. – № 1. – С. 26-30.

21. Long range annealing of defects in germanium by low energy plasma ions / J. F. Archilla, S. M. Coelho, F. D. Aurret, V. I. Dubinko, V. Hizhnyakov // *Physica D.* – 2015. – т. 297. – с. 56.
22. Interaction of propagating discrete breathers with a vacancy in a twodimensional crystal / A. A. Kistanov, S. V. Dmitriev, A. S. Semenov, V. I. Dubinko, D. A. Terentev // *Technical Physics Letters.* – 2014. – т. 40, № 8. – с. 657-661.
23. Interaction of discrete breathers with primary lattice defects in bcc Fe / D. A. Terentyev, A. V. Dubinko, V. I. Dubinko, S. V. Dmitriev, E. E. Zhurkin, M. V. Sorokin // *Model. Simul. Mater. Sc.* – 2015. – т. 23, № 2. – с. 085007.
24. Surface discrete breathers in Pt3Al intermetallic alloy / P. V. Zakharov, E. A. Korznikova, S. V. Dmitriev, E. G. Ekomasov, K. Zhou // *Surf. Sci.* – 2019. – т. 679, № 2. – с. 1.
25. Velarde M. G. Thermal solitons and solitons in 1D anharmonic lattices up to physiological temperature / M. G. Velarde, W. Ebeling, A. P. Chetverikov // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2008. – т. 18. – с. 3815.
26. Velarde M. G. From polaron to soliton: The addition of nonlinear elasticity to quantum mechanics and its possible effect upon electric transport / M. G. Velarde // *J. Comput. Appl. Math.* – 2010. – т. 233. – с. 1432.
27. Discrete-breather-assisted charge transport along DNA-like molecular wires / A. P. Chetverikov, W. Ebeling, V. D. Lakhno, M. G. Velarde // *Phys. Rev. E.* – 2019. – т. 100. – с. 052203.
28. Chetverikov A. P. Nonlinear soliton-like excitations in two-dimensional lattices and charge transport / A. P. Chetverikov, W. Ebeling, M. G. Velarde // *Eur. Phys. J.: Special Topics.* – 2013. – т. 222. – с. 2531.
29. Hema P. Quasi discreteness analysis of a two dimensional ferromagnetic spin system / P. Hema, M. M. Latha // *Chinese Journal of Physics.* – 2023. – т. 82. – с. 75-88.
30. Bajars J. Two-dimensional mobile breather scattering in a hexagonal crystal lattice. / J. Bajars, C. Eilbeck, B. J. Leimkuhler // *Physical review E.* – 2021. – т. 103, № 2-1. – с. 022212.
31. McGurn A. R. Transmission through Kerr media barriers within waveguides: Device applications / A. R. McGurn. – 2011.
32. Bebikhov Y.V., Naumov E.K., Semenova M.N., Dmitriev S.V. Discrete breathers in a β -FPUT square lattice from in-band external driving // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2024. – Т. 132. – С. 107897.
33. Бебихов Ю.В., Семенова М.Н., Рябов Д.С., Ксион Д. О возможности существования дискретных бризеров различных типов в ОЦК решетке с дальнодействием // *Materials. Technologies. Design.* – 2024. – т. 6. – № 4. – с. 41.
34. Семёнова М.Н., Бебихов Ю.В., Якушев И.А., Семёнов А.С. Разработка программы для выбора потенциала взаимодействия частиц в кристаллической решетке металлов // *Materials. Technologies. Design.* – 2024. – т. 6. – с. 99.
35. Семёнова М.Н., Бебихов Ю.В., Наумов Е.К., Дмитриев С.В. Моделирование стационарных и осциллирующих дискретных бризеров в биатомном кристалле типа CsCl // *Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.* – 2025. – Т. 22. – № 4 (102). – С. 67-78.
36. Бебихов Ю.В., Семёнова М.Н., Абдуллина Д.У., Наумов Е.К., Дмитриев С.В. Дискретные бризеры в трехмерной решетке с потенциалом Ферми-Паста-Улама-Цингоу // *Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.* – 2024. – Т. 21. – № 3. – С. 39-49.

Информация об авторах

Д.М. Наумова – аспирант Института физики молекул и кристаллов Уфимского федерального исследовательского центра РАН, младший научный сотрудник Института физики молекул и кристаллов Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Е.К. Наумов – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института физики молекул и кристаллов Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Д.С. Холмуродов – кандидат педагогических наук, преподаватель кафедры Технологического образования Каршинского государственного университета

С.В. Дмитриев – доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН

References

1. Dolgov A. S. On localization of oscillations in nonlinear crystal structure / A. S. Dolgov // *Sov. Phys. Solid State*. – 1986. – vol. 28. – p. 907.
2. Sievers A. J. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals / A. J. Sievers, S. Takeno // *Physical Review Letters*. – 1988. – vol. 61, № 8. – p. 970-973.
3. Flach S. Discrete breathers - Advances in theory and applications / S. Flach, A. V. Gorbach // *Physics Reports*. – 2008. – vol. 467, № 1. – p. 1-116.
4. Discrete breathers in crystals / S. V. Dmitriev, E. A. Korznikova, J. A. Baimova, M. G. Velarde // *Physics–Uspekhi*. – 2016. – vol. 59, № 5. – p. 446-461.
5. Page J. B. Asymptotic solutions for localized vibrational modes in strongly anharmonic periodic systems / J. B. Page // *Phys. Rev. B*. – 1990. – vol. 41, no. 11. – p. 7835-7838.
6. Flach S. Discrete breathers / S. Flach, C. R. Willis // *Physics Reports*. – 1998. – vol. 295, № 5. – p. 181-264.
7. Dubinko V. I. Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity / V. I. Dubinko, P. A. Selyshchev, J. F. Archilla // *Phys. Rev. E*. – 2011. – vol. 83. – p. 041124.
8. Kistanov A. A. Properties of moving discrete breathers in a monoatomic two-dimensional crystal / A. A. Kistanov, A. S. Semenov, S. V. Dmitriev // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. – 2014. – vol. 119, № 4. – p. 766-771.
9. Moving discrete breathers in bcc metals V, Fe and W / R. T. Murzaev, A. A. Kistanov, V. I. Dubinko, D. A. Terentyev, S. V. Dmitriev // *Comp. Mater. Sci*. – 2015. – vol. 98. – p. 88.
10. Marin J. L. Localized moving breathers in a 2D hexagonal lattice / J. L. Marin, J. C. Eilbeck, F. M. Russell // *Phys. Lett. A*. – 1998. – vol. 248, № 2-4. – p. 225-229.
11. Properties of moving discrete breathers in beryllium / O. V. Bachurina, R. T. Murzaev, A. S. Semenov, E. A. Korznikova, S. V. Dmitriev // *Phys. Solid State*. – 2018. – vol. 60. – p. 989.
12. Kistanov A.A., Semenov A.S., Dmitriev S.V. On Setting Initial Conditions for Simulating Moving Discrete Breathers in a Two-Dimensional Monatomic Crystal // *Fundamental Problems of Modern Materials Science*. – 2014. – Vol. 11. – No. 2. – Pp. 223-227.
13. Kistanov A.A., Semenov A.S. Collision of Moving Discrete Breathers in a Two-Dimensional Monatomic Crystal // *Fundamental Problems of Modern Materials Science*. – 2014. – Vol. 11. – No. 2. – Pp. 241-244.
14. Kistanov A.A., Semenov A.S., Murzaev R.T., Dmitriev S.V. Stationary and moving discrete breathers in hcp Co metal // *Fundamental problems of modern materials science*. – 2014. – Vol. 11. – No. 3. – Pp. 322-325.
15. Kistanov A.A., Semenov A.S., Murzaev R.T., Dmitriev S.V. Interaction of moving discrete breathers in hcp Mg metal // *Fundamental problems of modern materials science*. – 2014. – Vol. 11. – No. 4-2. – Pp. 572-577.
16. Semenov A.S., Korznikova E.A., Dmitriev S.V. Discrete breathers with hard and soft types of nonlinearity in a one-dimensional chain with long-range Morse interaction // *Letters on materials*. – 2015. – Vol. 5. – No. 1 (17). – Pp. 11-14.
17. Semenova M.N., Semenov A.S., Bebikhov Yu.V., Ryabov D.S., Chechin G.M., Rakhmatullina Zh.G., Korznikova E.A., Dmitriev S.V. Some characteristics of one-dimensional delocalized nonlinear vibrational modes of a triangular lattice with Morse interaction // *Fundamental problems of modern materials science*. – 2018. – Vol. 15. – No. 2. – Pp. 257-264.
18. Semenov A.S., Bebikhov Yu.V., Kistanov A.A. Simulation of energy transport in a crystal with NaCl structure assisted by discrete breathers // *Letters on Materials*. – 2017. – Vol. 7. – No. 2 (26). – Pp. 77-80.
19. Semenov A.S., Fomin S.Yu., Zhou K., Soboleva E.G. Discrete breather with hard nonlinearity in a two-dimensional biatomic crystal // *Letters on materials*. – 2017. – Vol. 7. – No. 3 (27). – Pp. 327-331.
20. Semenov A.S., Murzaev R.T., Kistanov A.A., Bebikhov Yu.V. Study of discrete breathers in hcp metals beryllium and zirconium // *Fundamental problems of modern materials science*. – 2015. – Vol. 12. – No. 1. – Pp. 26-30.
21. Long range annealing of defects in germanium by low energy plasma ions / J. F. Archilla, S. M. Coelho, F. D. Aurret, V. I. Dubinko, V. Hizhnyakov // *Physica D*. – 2015. – vol. 297. – p. 56.
22. Interaction of propagating discrete breathers with a vacancy in a twodimensional crystal / A. A. Kistanov, S. V. Dmitriev, A. S. Semenov, V. I. Dubinko, D. A. Terentev // *Technical Physics Letters*. – 2014. – vol. 40, № 8. – p. 657-661.
23. Interaction of discrete breathers with primary lattice defects in bcc Fe / D. A. Terentyev, A. V. Dubinko, V. I. Dubinko, S. V. Dmitriev, E. E. Zhurkin, M. V. Sorokin // *Model. Simul. Mater. Sc.* – 2015. – vol. 23, № 2. – p. 085007.

24. Surface discrete breathers in Pt3Al inter-metallic alloy / P. V. Zakharov, E. A. Korznikova, S. V. Dmitriev, E. G. Ekomasov, K. Zhou // *Surf. Sci.* – 2019. – vol. 679, № 2. – p. 1.
25. Velarde M. G. Thermal solitons and solec-trons in 1D anharmonic lattices up to physiological temperature / M. G. Velarde, W. Ebeling, A. P. Chetverikov // *Int. J. Bifurc. Chaos.* – 2008. – vol. 18. – p. 3815.
26. Velarde M. G. From polaron to solelectron: The addition of nonlinear elasticity to quantum mechanics and its possible effect upon electric transport / M. G. Velarde // *J. Comput. Appl. Math.* – 2010. – vol. 233. – p. 1432.
27. Discrete-breather-assisted charge transport along DNA-like molecular wires / A. P. Chetverikov, W. Ebeling, V. D. Lakhno, M. G. Velarde // *Phys. Rev. E.* – 2019. – vol. 100. – p. 052203.
28. Chetverikov A. P. Nonlinear soliton-like excitations in two-dimensional lattices and charge transport / A. P. Chetverikov, W. Ebeling, M. G. Velarde // *Eur. Phys. J.: Special Topics.* – 2013. – vol. 222. – p. 2531.
29. Hema P. Quasi discreteness analysis of a two dimensional ferromagnetic spin system / P. Hema, M. M. Latha // *Chinese Journal of Physics.* – 2023. – vol. 82. – p. 75-88.
30. Bajars J. Two-dimensional mobile breather scattering in a hexagonal crystal lattice. / J. Bajars, C. Eilbeck, B. J. Leimkuhler // *Phys. Rev. E.* – 2021. – vol. 103, no. 2-1. – p. 022212.
31. McGurn A. R. Transmission through Kerr media barriers within waveguides: Device applications / A. R. McGurn. – 2011.
32. Bebikhov Y.V., Naumov E.K., Semenova M.N., Dmitriev S.V. Discrete breathers in a β -FPUT square lattice from in-band external driving // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2024. – vol. 132. – p. 107897.
33. Bebikhov Yu.V., Semenova M.N., Ryabov D.S., Ksion D. On the Possibility of Existence of Discrete Breathers of Various Types in a Long-Action BCC Lattice // *Materials. Technologies. Design.* – 2024. – Vol. 6. – No. 4. – Pp. 41.
34. Semenova M.N., Bebikhov Yu.V., Yakushev I.A., Semenov A.S. Development of a Program for Selecting the Interaction Potential of Particles in the Crystal Lattice of Metals // *Materials. Technologies. Design.* – 2024. – Vol. 6. – Pp. 99.
35. Semenova M.N., Bebikhov Yu.V., Naumov E.K., Dmitriev S.V. Modeling of stationary and oscillating discrete breathers in a biatomic crystal of the CsCl type // *Bulletin of the North-Eastern Federal University M.K. Ammosova.* – 2025. – T. 22. – No. 4 (102). – Pp. 67-78.
36. Bebikhov Yu.V., Semyonova M.N., Abdullina D.U., Naumov E.K., Dmitriev S.V. Discrete breathers in a three-dimensional lattice with the Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou potential // *Bulletin of the North-Eastern Federal University M.K. Ammosova.* – 2024. – T. 21. – No. 3. – Pp. 39-49.

Information about the authors

D.M. Naumova is a graduate student at the Institute of Molecule and Crystal Physics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, and a junior researcher at the Institute of Molecule and Crystal Physics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences.

E.K. Naumov is a Candidate of physical and mathematical sciences, a junior researcher at the Institute of Molecule and Crystal Physics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences.

D.S. Kholmurodov – PhD in Pedagogical Sciences, Lecturer at the Department of Technological Education at Karshi State University

S.V. Dmitriev is a Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Research Fellow at the Institute of Mathematics with a Computing Center of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
The authors declare that there is no conflict of interest.

Статья поступила в редакцию 15.12.2025; одобрена после рецензирования 23.02.2026; принята к публикации 02.03.2026

The article was received by the editorial board on 15 Dec. 2025; approved after reviewing 23 Feb. 2026; accepted for publication 02 Mar. 2026.