



Научная статья

2.6.13. Процессы и аппараты химических технологий (технические науки)

УДК 577.3 2:66.084

doi: 10.25712/ASTU.2072-8921.2026.01.030

EDN: YGANQC

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ В МОДЕЛИ ЛОТКА-ВОЛЬТЕРРА

Александр Иванович Мошинский¹, Лариса Николаевна Рубцова²,
Елизавета Олеговна Цветкова³

^{1, 2, 3} Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет, Санкт-Петербург, Россия

¹ alex-moshinskij@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7135-0823>

² larisapns@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1687-1890>

³ cvetkova.elizaveta@spcpcu.ru, <https://orcid.org/0009-0005-3566-184X>

Аннотация. Система уравнений Лотка-Вольтерра, предложенная Лотка для описания периодической химической реакции и Вольтерра для моделирования биологической проблемы взаимодействия двух видов популяции, конкретно хищников и их жертв, стала классической для химико-биологических явлений. Тем не менее, не существует простых аналитических зависимостей, описывающих протекание процесса на основе уравнения математической модели. Поэтому в многочисленных учебниках и монографиях вынуждены приводить результаты, полученные численными методами, главным образом по эволюции концентраций популяций хищников и жертв, из-за чего трудно понять, как те или иные параметры модели влияют на протекание процесса взаимодействия популяций в системе. В работе анализируется система уравнений Лотка-Вольтерра как аналитическими, так и численными методами. Основным интересом представляет определение периода колебаний в системе Лотка-Вольтерра, что, главным образом и явилось целью исследования в настоящей работе. В работе получены простые аналитические зависимости, определяющих влияние специальных (определенных) комбинаций параметров модели хищник-жертва на период колебаний в системе. Выведена также асимптотическая зависимость для периода колебаний, когда фазовая кривая процесса подходит близко к началу координат фазовой плоскости.

Ключевые слова: Модель Лотка-Вольтерра, период колебаний, асимптотическая зависимость, аппроксимация.

Для цитирования: Мошинский А. И., Рубцова Л. Н., Цветкова Е. О. Исследование периода колебаний в модели Лотка-Вольтерра // Ползуновский вестник. 2026. № 1, С. 190–194. doi: 10.25712/ASTU.2072-8921.2026.01.030. EDN: <https://elibrary.ru/YGANQC>.

Original article

STUDY OF OSCILLATION PERIOD IN LOTKA-VOLTERRA MODEL

Alexander I. Moshinsky¹, Larisa N. Rubtsova², Elizabeth O. Tsvetkova³

^{1, 2, 3} Saint Petersburg State University of Chemistry and Pharmacy, Saint Petersburg, Russia

¹ alexander.moshinsky@pharminnotech.com, <https://orcid.org/0000-0001-7135-0823>

² larisapns@mail.ru <https://orcid.org/0000-0003-1687-1890>

³ cvetkova.elizaveta@spcpcu.ru

Abstract. The system of Lotka-Volterra equations is analyzed. The main goal is to obtain a relationship between the period of population fluctuations and the parameters that determine the course of the process in the predator-prey system. An asymptotic dependence is also derived for the oscillation period when the phase curve of the process approaches closes to the origin of the coordinates of the phase plane. Therefore, numerous textbooks and monographs are forced to present results obtained by numerical methods, mainly on the evolution of population concentrations of predators and prey, which makes it difficult to understand how certain model parameters affect the process of interaction between populations in the system. The work analyzes the system of Lotka-Volterra equations using both analytical and numerical methods. The main interest is in determining the period of oscillations in the Lotka-Volterra system, which was the main purpose of the study in this work. The work obtained simple analytical dependencies that determine the influence of special (certain) combinations of parameters of the predator-prey model on the period of oscillations in the system. An asymptotic dependence has also been derived for the oscillation period when the phase curve of the process approaches the origin of coordinates of the phase plane.

Keywords: Lotka-Volterra model, oscillation period, asymptotic dependence, approximation.

For citation: Moshinskiy, A. I., Rubtsova, L. N., Tsvetkova, E. O. (2026). Study of oscillation period in lotka-volterra model. Polzunovskiy vestnik, (1), 190-194. (In Russ). doi: 10.25712/ASTU.2072-8921.2026.01.030. EDN: <https://elibrary.ru/YGANQC>.

ВВЕДЕНИЕ

Модель Лотка-Вольтерра стала классической при изучении биологических проблем с периодическим по времени протеканием процессов. Это выражается в том, что во многих монографиях и учебниках по математическому моделированию биологических процессов обязательно упоминается система уравнений Лотка-Вольтерра (см. например, [1–8]). В математической литературе по дифференциальным уравнениям также довольно часто (например, [9–11]) исследуют систему уравнений Лотка-Вольтерра. Эта модель также не редко присутствует в междисциплинарной литературе по синергетике [12, с. 209, 13, с. 179].

В данном сообщении мы на основе численного анализа системы уравнений Лотка-Вольтерра приведем формулу для расчета периода колебаний концентраций особей. В приведенных ниже безразмерных переменных аппроксимационная формула оказалась довольно точной, что было выяснено на многочисленных расчетах, проводимых на семинарах (лабораториях) для студентов.

Постановка задачи. Пусть на одной и той же территории проживают две биологические популяции с численностями $N(t)$ и $M(t)$, причем первая, например, растительноядная, а вторая употребляет в пищу представителей первой популяции (например, зайцы и рыси). Такая же ситуация возникает и в пруду, населенном карасями и щуками.

Уравнение, определяющее эволюцию популяции жертвы (N), имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N, \quad (1)$$

где $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, член $\beta_1 MN$ описывает вынужденное убывание (естественной смертностью популяции N пренебрегаем). Закон убывания объясняется тем, что вероятность «взаимодействия» популяций считается пропорциональной количеству особей обеих популяций. При построении модели хищник-жертва предполагается, что суммарный объем обеих особей намного меньше объема ареала и что число особей достаточно велико, чтобы для анализа их изменения можно было бы привлечь дифференциальное исчисление. Можно условно далее (в частности) считать, что N – число карасей, M – число щук.

Численность второй популяции (хищника M) растет тем быстрее, чем больше численность первой популяции, а при ее отсутствии уменьшается со скоростью, пропорциональной численности $M(t)$ (тем самым ее рождаемость не учитывается, как и эффект насыщения):

$$\frac{dM}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N)M, \quad (2)$$

где $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$. Каждый акт «взаимодействия» уменьшает популяцию жертв, но способствует увели-

чению популяции хищников (члены $\beta_1 MN$ и $\beta_2 NM$ в правой части уравнений).

Очевидно, что система находится в равновесии при $M^* = \alpha_1/\beta_1$ и $N^* = \alpha_2/\beta_2$, когда $dN/dt = dM/dt = 0$ (тривиальные случаи, когда $N = 0$ и (или) $M = 0$ при равновесии мы не рассматриваем).

Система уравнений (1), (2) имеет интеграл, который получается при делении одного уравнения на другое, разделения переменных в получившемся уравнении и интегрировании результата:

$$\begin{aligned} p(N) + q(M) &= R, \quad p(N) = \beta_2 N - \alpha_2 \ln(N), \\ q(M) &= \beta_1 M - \alpha_1 \ln(M), \end{aligned} \quad (3)$$

где R – постоянная интегрирования.

Систему (1), (2) приведем к безразмерному виду, введя следующие переменные и параметры

$$\begin{aligned} n &= N/N^*, \quad m = M/M^*, \quad \kappa = \alpha_1/\alpha_2, \quad n_0 = N_0/N^*, \quad m_0 \\ &= M_0/M^*, \quad \omega = (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2}, \quad \tau = t\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$N^* = \alpha_1/\beta_1, \quad M^* = \alpha_2/\beta_2.$$

Некоторые кривые, описываемые уравнением (3) в плоскости [фазовой для системы (1), (2)] n, m , при определенных значениях параметров и постоянной R , представлены на рисунке 1. Замкнутые кривые свидетельствуют о периодическом протекании процесса изменения численности популяций хищников и жертв, что было (приблизительно) замечено в случае малых отклонений от равновесных значений в ряде работ. Стрелки на рисунке 1 показывают направление развития процесса во времени.

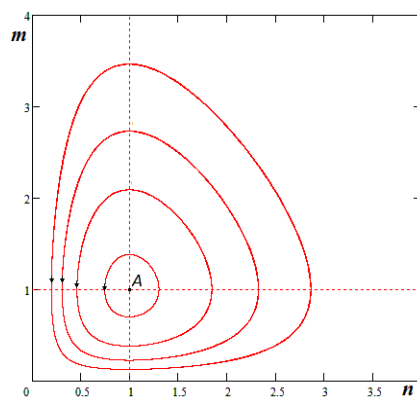


Рисунок 1 – Фазовые кривые системы уравнений (1), (2)

Figure 1 – Phase curves of the system of equations (1), (2)

В безразмерных координатах центр овалов в фазовой плоскости (точка A на рис. 1) имеет координаты (1, 1).

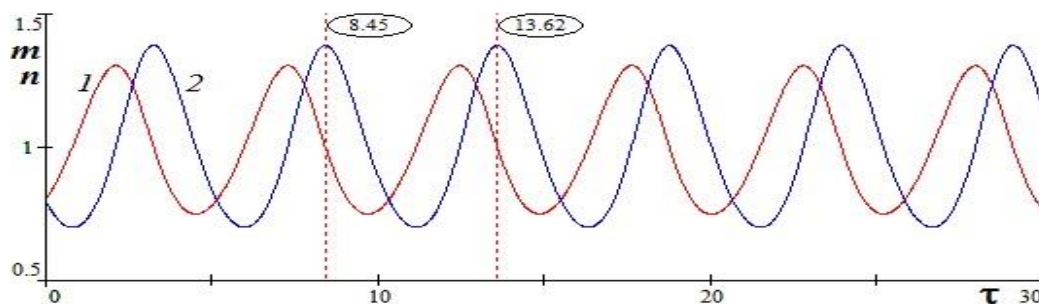


Рисунок 2 – 1) жертва n , 2) хищник m / Figure 2 – 1) victim n , 2) predator m

На рисунке 2 представлены концентрации m и n как функции времени.

Целью работы является нахождение расчетной формулы для определения периода колебаний популяций хищников и жертв как функции присутствующих в задаче параметров.

Анализ проблемы определения периода колебаний популяций.

В переменных (4) задача (1), (2) запишется так

$$\frac{dn}{d\tau} = \sqrt{\kappa}(1-m)n, \quad \frac{dm}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}(n-1)m, \quad (5)$$

$$n(0) = n_0, \quad m(0) = m_0. \quad (6)$$

Интеграл (3) теперь имеет форму

$$n - \ln(n) + \kappa[m - \ln(m)] = \text{const} = r = n_0 - \ln(n_0) + \kappa[m_0 - \ln(m_0)]. \quad (7)$$

Из полученных зависимостей следует, что период колебаний является функцией двух переменных κ и r , т.е. $T = T(\kappa, r)$.

При построении фазовой траектории при численном расчете все равно, с какой точки кривой начинать расчет. Однако удобно начинать на «диагонали» $n = m$, т.е. принять

$$n_0 = m_0 = \gamma. \quad (8)$$

Именно такие характерные кривые при выходе из одной точки γ (8) показаны на рисунке 2. Процедура определения периода колебаний построена так.

Для определения периода колебаний численности популяций при конкретных значениях параметров

целесообразно использовать возможности программы Mathcad, выделив вертикальным маркером характерную точку на графике одной из функций $n(\tau)$ или $m(\tau)$. Можно взять точку максимума или минимума выбранной функции. Далее другой вертикальный маркер поместить в точку, отстоящую от выбранной на величину периода. Теперь по показаниям координат при маркерах можно с достаточной для практики точностью определить значение периода колебаний. Например, из рис. 2 следует, что период колебаний в безразмерных единицах равен $T = 13.62 - 8.45 = 5.17$. Удобнее при выборе $n_0 = m_0$, когда при $\tau = 0$ две кривые пересекаются, найти точку их пересечения, отстоящую на период колебаний и поместить в нее вертикальный маркер. При этом показание единственного маркера будет давать период колебаний.

В данном случае, учитывая соотношение (8), значение интеграла (7) таково:

$$r = (\gamma - \ln\gamma)(1 + \kappa). \quad (9)$$

Зафиксировав параметр κ и меняя величину γ от 0.05 до 1, находим период T как функцию параметров κ и r , т.е. $T = T(\kappa, r)$. При $\gamma > 1$ мы по второму разу попадем на уже выбранный овал с некоторой координатой при $\gamma < 1$. Поэтому для определения периода колебаний достаточно ограничиться интервалом $0 < \gamma < 1$. Примечательно, что эта функция оказалась практически линейной:

$$T(\kappa, r) = a(\kappa)r + b(\kappa). \quad (10)$$

Таблица 1 – Данные расчета функции $T(\kappa, r)$ с учетом зависимости (10) при $\kappa = 5$

Table 1 – Calculation data for the function $T(\kappa, r)$ taking into account dependence (10) at $\kappa = 5$

γ	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
r	18.274	14.416	12.283	10.857	9.818	9.024	8.399	7.898
T	13/843	11.622	10.364	9.401	8.646	8.276	7.906	7.536
γ	0.45	0.5	0.55	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
r	7.491	7.159	6.887	6.665	6.34	6.139	6.032	6/0
T	7.24	7.092	6.869	6.721	6.425	6.351	6.277	6.28

В качестве примера в таблице 1 приведены результаты численного расчета по предложенному методу при $\kappa = 5$. При этом в формуле (10) $a = 1.132$, $b = 4.011$.

Простая структура зависимости $T(\kappa, r)$, выраженная формулой (10), позволяет сравнительно легко построить аппроксимационную формулу для периода колебаний $T(\kappa, r)$ с хорошей точностью. Формула для $T(\kappa, r)$ представляется через две простые функции одной переменной.

В ряде цитированных монографий проводится исследование поведения решения в окрестности точки А на рисунке 1 путем линеаризации системы уравне-

Таблица 2 – Данные расчета функции $a(\kappa)$ и $b(\kappa)$ с учетом зависимости (11).

Table 2 – Calculation data for functions $a(\kappa)$ and $b(\kappa)$ taking into account dependence (11).

κ	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.5
a	3.132	1.99	1.539	1.291	1.132	0.953
b	2.937	3.472	3.689	3.925	4.011	3.908
κ	2	2.4	3	4	5	7
a	0.843	0.789	0.72	0.669	0.625	0.567
b	3.731	3.585	3.39	2.932	2.57	1.84

Эти данные можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$a(\kappa) = 0.426 + 0.73/\kappa^{0.816}. \quad (12)$$

Теперь период колебаний численности популяций можно рассчитывать по следующей аппроксимационной формуле:

$T(\kappa, r) = 2\pi + a(\kappa)(r - 1 - \kappa)$, $\kappa \in (0.2, 7)$, $r = O(1)$, (13)
полученной при комбинации зависимостей (10)–(12). Соотношение (13) проиллюстрировано на рисунке 3.

ний (1), (2). Легко проверить, что в случае безразмерной системы уравнений (5) при $\gamma \rightarrow 1$ получаем $T \rightarrow 2\pi$. Таким образом, в соотношении (10) можно разыскивать только одну из функций $a(\kappa)$ и $b(\kappa)$. Другую найдем из выражения:

$$2\pi = a(\kappa)(1 + \kappa) + b(\kappa). \quad (11)$$

Для функций $a(\kappa)$ и $b(\kappa)$ расчетные данные представлены в таблице 2.

Рисунок 3 свидетельствует о хорошей визуальной точности аппроксимационной формулы (12) данным таблицы 2. Приведем также значение критерия среднеквадратичного отклонения зависимости (12) и дискретных величин $a(\kappa)$ из таблицы 2:

$$\frac{1}{12} \sum_{n=1}^{12} [a(\kappa_n) - a^*(\kappa_n)]^2 = 1.225 \times 10^{-4},$$

где $a^*(\kappa_j)$ – данные таблицы 2, $a(\kappa_j)$ – расчет по соотношению (12).

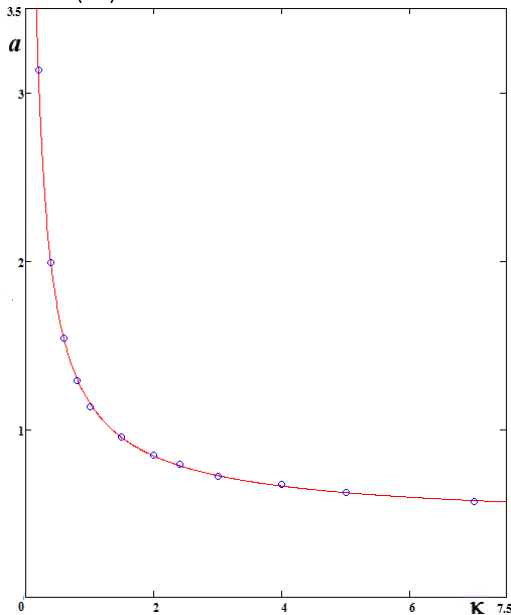


Рисунок 3 – Аппроксимационная формула для функции $a(\kappa)$ (12), $\circ$ – данные таблицы 2

Figure 3 – The approximation formula for the function $a(\kappa)$ (12), $\circ$ is the data in Table 2

Явная функциональная связь числа хищников и жертв.

Интеграл (7), записанный так:

$$n - \ln(n) = r - \kappa[m - \ln(m)] = s(m, r, \kappa) \quad (14)$$

позволяет явно выразить, например переменную n как функцию m , если использовать известное [14, С. 424] выражение

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ak)^{k-1}}{k!} w^k, \quad (15)$$

которое является разрешением уравнения $w = z \exp(-az)$

относительно z . Взяв в соотношении (15) $a = 1$ и записав интеграл (14) в форме $\ln \exp(-n) = \exp(-s)$, получаем выражение функции n через функцию m и другие параметры задачи, входящие в функцию s (14):

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} \exp(-sk). \quad (16)$$

Ряд (16) сходится при $s \geq 1$ и в общем случае представляет функцию n как двужначную переменную m . Последнее очевидно из графиков рис. 1.

Представленная формула (12) обоснована хоть и в большом, но ограниченном интервале изменения параметра κ . Мы не приближались слишком близко в таблице 1 к точке $\gamma = 0$. При схожих условиях (n_0, γ) $n_0 = O(1)$, $\gamma \rightarrow 0$ в работе [9, С. 37] сформулирована задача, решение которой приводит к логарифмической зависимости периода колебаний популяций от малого параметра γ ($\gamma \rightarrow 0$): $T \sim \ln(1/\gamma)$.

Следует заметить [9, С. 37], что «математическое» стремление к бесконечности нужно отличать от физического. Например, $1/\gamma$ при $\gamma \rightarrow 0$ действительно стремится к бесконечности (например, при $\gamma = 10^{-6}$ величина $1/\gamma$ действительно велика). В то же время $|\ln \gamma|$ при $\gamma \rightarrow 0$ практически остается ограниченным (например, при $\gamma = 10^{-6}$ эта величина порядка 10).

Практически с логарифмами в асимптотиках можно обращаться как с константами. К тому же выводу приходят исследователи в некоторых приложениях (например, [15, С. 265]). Поэтому приближение параметра γ к нулю теоретически (математически) должно «искривить» зависимость (10), что практически трудно заметить. Во всяком случае, аппроксимация периода колебаний численностей популяций соотношением (10) в рассмотренном диапазоне параметров оказалась настолько удачной, что не имело смысла приводить графические иллюстрации.

Следует иметь в виду, что слишком малое значение параметра γ может привести к неадекватности модели Лотка-Вольтерра, поскольку модель предполагает достаточно большое количество особей, чтобы можно было использовать дифференциальные уравнения, что свидетельствует в пользу физической трактовки малого параметра. Модель может стать неадекватной и при $\gamma \rightarrow \infty$, поскольку при этом соответствующий овал в определенном интервале времени будет проходить возле начала координат фазовой плоскости (рис. 1).

Вывод асимптотической формулы для периода колебаний популяций.

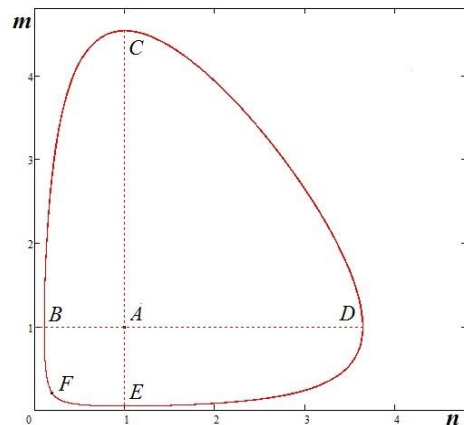


Рисунок 4 – Фазовая кривая системы (5), поясняющая вывод асимптотической формулы

Figure 4 – The phase curve of the system (5), explaining the derivation of the asymptotic formula

Получим асимптотическую формулу для периода колебаний численности популяций в нашем случае при $n_0 = m_0 = \gamma$ (8) (точка F на рис. 4). Будем оценивать «части» периода на отдельных участках замкнутой кривой BCDEF рис. 4. Начнем с участка BF. На нем в силу первого уравнения (5) $dn/dt > 0$, т.е. на этом участке функция n монотонно возрастает. В таком случае из второго уравнения (5) следует:

$$T_{BF} = \sqrt{\kappa} \int_1^{\gamma} \frac{dm}{m[n(m)-1]} = \frac{\ln(1/\gamma)\sqrt{\kappa}}{1-n(m_*)} = \ln(1/\gamma)\sqrt{\kappa} + \delta, \quad (17)$$

где мы воспользовались теоремой о среднем значении интеграла [16, С. 115]. m_* – некоторая точка из интервала $(\gamma, 1)$. Здесь остаточный член δ равен:

$$\delta = \frac{n(m_*)\sqrt{\kappa}}{1-n(m_*)} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right), \quad n(m_*) < \gamma$$

Имеем

$$0 < \delta < \frac{\gamma \ln(1/\gamma)\sqrt{\kappa}}{1-n(1)}.$$

Знаменатель в этом выражении при $\gamma \rightarrow 0$ ограничен (стремится к единице), тогда как числитель стремится к нулю. Итак, имеем

$$T_{BF} = \kappa^{1/2} \ln(1/\gamma) + o(\gamma), \quad \kappa = O(1). \quad (18)$$

Аналогичным образом, взяв другое уравнение (5), получаем формулу для величины T_{FE} :

$$T_{FE} = \frac{\ln(1/\gamma)}{\sqrt{\kappa}} + o(\gamma), \quad \kappa = O(1). \quad (19)$$

На других участках контура овала рисунка 4 интегралы, связанные со временем пребывания на них, будут меньше по порядку величины найденных выражений (18), (19). Действительно, оценим значение функции m в точке C , используя интеграл (7). Имеем, подставляя $n(C) = 1$ в этот интеграл:

$$(1 + \kappa)(\gamma - \ln \gamma) = 1 + \kappa \{m(C) - \ln[m(C)]\}.$$

При $\gamma \rightarrow 0$ и $\kappa = O(1)$, что предполагаем и далее, находим: $m(C) = O[\ln(1/\gamma)]$.

В точке $n = 1$ интеграл

$$\int_{m(C)}^1 \frac{dm}{m[n(m)-1]}$$

имеет интегрируемую особенность: $n-1 \approx \sqrt{m(C)-m}$.

В принципе можно взять для интегрирования точку, лежащую левее точки C и достаточно близко к ней. Фактически данная точка не вызывает каких-либо осложнений при оценке соответствующего интеграла. Имеем в этом случае оценку:

$$T_{CB} = \sqrt{\kappa} \int_{m(C)}^1 \frac{dm}{m[n(m)-1]} = \frac{\sqrt{\kappa}}{1-n(m_*)} \ln \left[\ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right] = O \left\{ \ln \left[\ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right] \right\}.$$

Аналогично $T_{ED} = O[\ln \ln(1/\gamma)]$.

Если провести линию $m = \text{const}$ при $m > 1$, пересекающую овал рисунка 4 в двух точках, то можно отметить следующее. При этом на линии CD производная dm/dt будет больше таковой, чем на линии BC , поскольку на ней будет больше значение переменной n (см. второе уравнение (5)). Поэтому время перехода из точки D в точку C будет меньше, чем T_{CB} . В плане O оценок, имеем $T_{DC} \leq O[\ln \ln(1/\gamma)]$. Мы прошли по полному циклу фазовой кривой рисунка 4. В результате наибольший асимптотический вклад в период колебаний популяций T вносят величины T_{BF} (18) и T_{FE} (19). Таким образом, асимптотическая формула для периода колебаний, как следует из зависимостей (18), (19), будет иметь вид

$$T \approx \left(\sqrt{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \right) \ln \left(\frac{1}{\gamma} \right), \quad \gamma \rightarrow 0, \quad \kappa = O(1), \quad (20)$$

что согласуется с утверждением задачи из работы [9]. Поскольку параметр γ при $\gamma < 1$ связан однозначной зависимостью с постоянной r в интеграле (9), соотношение (20) целесообразно записать, используя параметр r . При $\gamma \rightarrow 0$ из соотношения (14) следует, что $\ln(1/\gamma) \approx r/(1 + \kappa)$. Поэтому асимптотическую формулу (20) можно переписать так:

$$T \approx \frac{r}{\sqrt{\kappa}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad \kappa = O(1).$$

Эта формула удобнее зависимости (20), поскольку не опирается на выбор конкретных начальных условий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что в определенном диапазоне параметров в процессе эволюции популяций в системе хищник-жества период колебаний можно достаточно надежно описывать аппроксимационной формулой (13). Получена явная связь между концентрациями популяций (16).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare that there is no conflict of interest.

Статья поступила в редакцию 07 октября 2025; одобрена после рецензирования 24 февраля 2026; принята к публикации 16 марта 2026.

The article was received by the editorial board on 07 Oct 2025; approved after editing on 24 Feb 2026; accepted for publication on 16 Mart 2026.

Представлена асимптотическая формула (20) для периода колебаний в интересном для модели Лотка-Вольтерра случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.
2. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983. 400 с.
3. Волькенштейн М.В. Общая биофизика. М.: Наука, 1978. 592 с.
4. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974. 180 с.
5. Базыкин А.Д. Математическая физика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 181 с.
6. Рубин А.Б., Пытьева Н.Ф., Ризниченко Г.Ю. Кинетика биологических процессов: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1987. 304 с.
7. Антонов В.Ф., Черныш А.М., Пасечник В.И., Вознесенский С.А., Козлова Е.К. Биофизика: учеб. для студентов высш. учеб. заведений. М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС. 1999. 288 с.
8. Мошинский А.И. Математическое моделирование химико-технологических и биотехнологических процессов. М.: Изд-во КНОРУС, 2021. 336 с.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1984. 272 с.
10. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 240 с.
11. Гордин В.А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать. учеб. пособие. М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2016. 531 с.
12. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 5. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 312 с.
13. Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Изд-во Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
15. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 312 с.
16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Наука, 1969. 800 с.

Информация об авторах

А. И. Мошинский – к.т.н., доцент кафедры «Процессы и аппараты химической технологии» ФГБОУ ВО СПбХФА минздрава России.

Л. Н. Рубцова – к.фарм.н., доцент кафедры, «Процессы и аппараты химической технологии» ФГБОУ ВО СПбХФА минздрава России.

Е. О. Цветкова – студент 3 курса кафедры «Процессы и аппараты химической технологии» ФГБОУ ВО СПбХФА минздрава России.

Information about the authors

A.I. Moshinskiy - associate prof., department of processes and apparatuses of chemical technology Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University.

L.N. Rubtsova - associate prof., department of processes and apparatuses of chemical technology Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University.

E.O. Tsvetkova - 3rd year student, department of processes and apparatuses of chemical technology Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University.