



Научная статья

2.6.13 – Процессы и аппараты химических технологий (технические науки)

УДК 534-8

doi: 10.25712/ASTU.2072-8921.2024.02.029



ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ИСКАЖЕНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН, ОБРАЗУЕМЫХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАВИТАЦИИ

Роман Николаевич Голых¹, Вячеслав Дмитриевич Минаков²

^{1,2} Бийский технологический институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, Бийск, Россия

¹ grn@bti.secna.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8204-0000>

² barsukov.ar@bti.secna.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4863-0000>

Аннотация. Эффективность массообменных процессов в системах «газ–жидкость» ограничена малым коэффициентом диффузии газа в жидкости по сравнению с коэффициентом диффузии газа в газе (меньше в 10000 раз и более). В связи с этим актуальна разработка физических принципов, направленных на устранение лимитирующих факторов процесса. Поскольку малый коэффициент диффузии является принципиальным физическим ограничением процесса, был рассмотрен подход, основанный на увеличении площади межфазной поверхности взаимодействия за счёт формирования капиллярных волн под действием схлопывающихся кавитационных пузырьков (максимальный размер 50...100 мкм). В представленной статье межфазная поверхность взаимодействия представляет собой возмущённую сферическую оболочку. Рассмотрение сферической оболочки связано с тем, что наиболее эффективный способ реализации межфазного взаимодействия «газ–жидкость» заключается в барботировании сплошной жидкой фазы в виде крупных пузырьков, имеющих размер до нескольких мм. На сегодняшний день известны модели формирования капиллярных волн на плоской поверхности. Однако формирование капиллярных волн на поверхности сферического пузырька при наличии объёма окружающей жидкости рассматривалось лишь с точки зрения общих выражений для собственных частот колебаний пузырька без рассмотрения влияния кривизны сферической поверхности на искажение волн. Предложена гидродинамическая модель формирования капиллярных волн с учётом искажений, вызванных формой сферической поверхности. Разработан алгоритм приближённого аналитического решения уравнения, основанный на асимптотическом разложении по средней кривизне поверхности. Установлено, что искажения начальной поверхности в виде сферической кривизны не влияют на длину формируемых волн, однако приводят к локальной пространственной модуляции амплитуды вдоль поверхности.

Ключевые слова: ультразвук, волны, кавитация, поверхность, искажения.

Благодарности: Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-12-00278, <https://rscf.ru/project/23-12-00278/>.

Для цитирования: Голых Р. Н., Минаков В. Д. Теоретические исследования влияния кривизны сферической поверхности на искажение капиллярных волн, образуемых под действием кавитации // Ползуновский вестник. 2024. № 2, С. 217–222. doi: 10.25712/ASTU.2072-8921.2024.02.028. EDN: <https://elibrary.ru/UYVGZF>.

Original article

THEORETICAL STUDIES OF THE INFLUENCE OF CURVATURE OF A SPHERICAL SURFACE ON THE DISTORTION OF CAPILLARY WAVES FORMED UNDER THE INFLUENCE OF CAVITATION

Roman N. Golykh¹, Vyacheslav D. Minakov²

^{1,2} Biysk Technological Institute (branch) of Polzunov Altai State Technical University, Biysk, Russia

¹ grn@bti.secna.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8204-0000>

² barsukov.ar@bti.secna.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4863-0000>

© Голых Р. Н., Минаков В. Д., 2024

Abstract. *The efficiency of mass transfer processes in gas-liquid systems is limited by the small diffusion coefficient of gas in liquid compared to the diffusion coefficient of gas in gas (10,000 times less or more). In this regard, the development of physical principles aimed at eliminating the limiting factors of the process is relevant. Since a low diffusion coefficient is a fundamental physical limitation of the process, an approach was considered based on increasing the area of the interfacial interaction surface due to the formation of capillary waves under the action of collapsing cavitation bubbles (maximum size 50...100 μm). In the presented article, the interfacial interaction surface is a perturbed spherical shell. Consideration of a spherical shell is due to the fact that the most effective way to implement gas-liquid interphase interaction is to bubble a continuous liquid phase in the form of large bubbles up to several mm in size. To date, models for the formation of capillary waves on a flat surface are known. However, the formation of capillary waves on the surface of a spherical bubble in the presence of a volume of surrounding liquid was considered only from the point of view of general expressions for the natural frequencies of oscillations of the bubble, without considering the influence of the curvature of the spherical surface on the distortion of the waves. A hydrodynamic model of the formation of capillary waves is proposed, taking into account distortions caused by the shape of the spherical surface. An algorithm for an approximate analytical solution of the equation has been developed, based on an asymptotic expansion in the mean curvature of the surface. It has been established that distortions of the initial surface in the form of spherical curvature do not affect the length of the generated waves, but lead to local spatial modulation of the amplitude along the surface.*

Keywords: *ultrasonic, waves, cavitation, surface, disturbances.*

Acknowledgements: *The research was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-12-00278, <https://rscf.ru/project/23-12-00278/>.*

For citation: Golykh, R.N. & Minakov, V.D. (2024). Theoretical studies of the influence of the curvature of a spherical surface on the distortion of capillary waves formed under the action of cavitation. *Polzunovskiy vestnik*, (2), 223-222. (In Russ). doi: 10/25712/ASTU.2072-8921.2024.02.029. EDN: <https://UYVGZF>.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективность массообменных процессов в системах «газ–жидкость» ограничена малым коэффициентом диффузии газа в жидкости по сравнению коэффициентом диффузии газа в газе (меньше в 10000 раз и более) [1–3]. В связи с этим актуальна разработка физических принципов, направленных на устранение лимитирующих факторов процесса [4–7]. Поскольку малый коэффициент диффузии является принципиальным физическим ограничением процесса, был рассмотрен подход, основанный на увеличении площади межфазной поверхности взаимодействия за счёт формирования капиллярных волн под действием схлопывающихся кавитационных пузырьков (максимальный размер 50...100 мкм). В представленной статье межфазная поверхность взаимодействия представляет собой возмущённую сферическую оболочку. Рассмотрение сферической оболочки связано с тем, что наиболее эффективный способ реализации межфазного взаимодействия «газ–жидкость» заключается в барботировании сплошной жидкой фазы в виде крупных пузырьков, имеющих размер до нескольких мм. На сегодняшний день известны модели формирования капиллярных волн на плоской поверхности. Однако формирование капиллярных волн на поверхности сферического пузырька при наличии объёма окружающей жидкости рассматривалось лишь с точки зрения общих выражений для собственных частот колебаний пузырька без

рассмотрения влияния кривизны сферической поверхности на искажение волн.

Поэтому цель исследования заключается в разработке модели формирования капиллярных волн на поверхности с учётом влияния её начальной сферической кривизны.

Задачи исследования включают:

- формулировку математической постановки задачи моделирования капиллярных волн на поверхности с начальной сферической кривизной;
- разработку алгоритма приближённого решения задачи;
- анализ влияния сферической кривизны поверхности на профиль капиллярных волн.

Решение поставленных задач представлено в следующих разделах работы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости вблизи сферической поверхности. Течение предполагает, что квадрат длины капиллярной волны на поверхности мал по сравнению с квадратом радиуса кавитационного пузырька.

Такое ограничение на отношение квадратов, а не на отношение линейных величин связано с тем, что:

- при принятии допущения о малости линейных слагаемых кривизна сферической поверхности на формирование капиллярных волн

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ИСКАЖЕНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН, ОБРАЗУЕМЫХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАВИТАЦИИ

не влияет. Определение формы волн для данного случая (когда начальная поверхность близка к плоской) является решенной задачей;

- построение точного решения задачи со свободной поверхностью при учёте нелинейных слагаемых в выражении для средней кривизны является чрезвычайно сложной задачей;

- в свою очередь, данное отношение позволяет рассматривать формирование волн на участке поверхности, размер которого составляет вплоть до 0,2 от величины диаметра пузырька или до 0,4 от величины радиуса кривизны его поверхности.

Форма расчётной области выглядит следующим образом (рисунок 1).

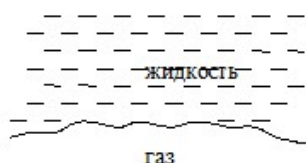


Рисунок 1 – Форма расчётной области для определения площади межфазной поверхности «газ–жидкость»

Figure 1 - Calculation area form for determining square of interphase surface “gas-liquid”

В рамках поставленной задачи колебания межфазной поверхности возбуждаются за счёт пространственно распределённой силы, вызванной ударными волнами под действием схлопывающихся кавитационных пузырьков.

Поскольку ударные волны, образуемые под действием кавитации [2], имеют широкий спектр, то было рассмотрено возбуждение колебаний межфазной поверхности, при воздействии одной из гармоник, имеющей фиксированную пространственную длину волны и фиксированную частоту.

Поскольку задача решается в приближении идеальной несжимаемой жидкости, то для её решения рассматривается потенциальное течение, описываемое уравнением Лапласа, следующим из уравнения неразрывности, и уравнения сохранения импульса.

При этом рассматриваются малые амплитуды поверхностных волн по сравнению с их длиной, что даёт возможность исключить нелинейные слагаемые в уравнениях.

$$\Delta \varphi = 0; \quad (1)$$

$$p = P_{ext} + p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (2)$$

где φ – потенциал скорости движения жидкости, m^2/c ; p – мгновенное значение давления в жидкости, Па; p_0 – статическое давление в жидкости, Па; ρ – плотность жидкости, kg/m^3 ; t – время, с; P_{ext} – внешнее силовое воздействие (ими могут являться ударные волны, созда-

ваемые от соседних схлопывающихся кавитационных пузырьков), Па.

Положение границы описывается параметрически заданной функцией:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_c, y_c, t) = \mathbf{r}_0(x_c, y_c) + \mathbf{s}(x_c, y_c, t); \quad (3)$$

На границе справедливы следующие условия, которые в приближении малых амплитуд выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \nabla \varphi; \quad (4)$$

$$-\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2\sigma H = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R} \right) \times \left(\left(\frac{4\pi R^3}{\int_{4\pi} \|\mathbf{r}(x_c, y_c)\|^3 d\Omega} \right)^{1/3} - 1 \right) \approx 0; \quad (5)$$

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \approx$$

$$\approx \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c} \right) + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_c} \right) \right) N -$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c} \right) M -$$

$$- 2 \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y_c} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_c} \right) \right) M +$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c} \right) + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y_c} \right) \right) L \times$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c} \right) + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_c} \right) \right) \times$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c} \right) + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y_c} \right) \right) -$$

$$- \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c} \right)^2 -$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_c} + \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y_c}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y_c} \right)^{-1}$$

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_c} \right); \quad L = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_c^2}, \mathbf{n} \right);$$

$$G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_c}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_c} \right); \quad N = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y_c^2}, \mathbf{n} \right);$$

$$F = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_c}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_c} \right);$$

Далее, используя указанную систему уравнений (1, 2) с граничными условиями (4, 5), задача решалась в специальной системе координат (x_c, y_c, z_c) , которая далее называется **проек-**

ционной, для описания волн на сферической поверхности. Преобразования между декартовой и проекционной системами координат осуществляются согласно следующему правилу:

$$x = R \frac{x_c}{r_c} \sin \frac{r_c}{R};$$

$$y = R \frac{y_c}{r_c} \sin \frac{r_c}{R};$$

$$z = (R + z_c) \cos \frac{r_c}{R} - R.$$

В свою очередь, форма межфазной поверхности полностью определялась функцией $h_c(x_c, y_c, t)$, и координаты каждой точки межфазной поверхности рассчитываются согласно выражениям:

$$x = R \frac{x_c}{r_c} \sin \frac{r_c}{R};$$

$$y = R \frac{y_c}{r_c} \sin \frac{r_c}{R};$$

$$z = (R + h_c) \cos \frac{r_c}{R} - R.$$

Таким образом, в представленной задаче являются неизвестными функции

$$h_c(x_c, y_c, t);$$

$$\varphi(x_c, y_c, z_c, t).$$

Для описания деформации поверхности с учётом её кривизны использовался метод асимптотического разложения функций в степенной ряд по величине $1/R$.

$$h_c(x_c, y_c, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_c^{(n)}(x_c, y_c, t) \frac{1}{R^n};$$

$$\varphi(x_c, y_c, z_c, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_c, y_c, z_c, t) \frac{1}{R^n}.$$

Уравнение Лапласа для потенциала скорости выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi(x_c, y_c, z_c, t)) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi(x_c, y_c, z_c, t)) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi(x_c, y_c, z_c, t)) = \Delta x_c \frac{\partial \varphi}{\partial x_c} + \Delta y_c \frac{\partial \varphi}{\partial y_c} + \\ &+ \|\nabla x_c\|^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_c^2} + \|\nabla y_c\|^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_c^2} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial x_c}{\partial x} \frac{\partial y_c}{\partial x} + \frac{\partial x_c}{\partial y} \frac{\partial y_c}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_c \partial y_c} + \frac{1}{\cos^2 \frac{r_c}{R}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_c^2} \end{aligned}$$

Полученные выражения позволили рассчитать распределения колебаний волн по поверхности сферы.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчёты проводились для капиллярных волн, возбуждаемых за счёт внешних ударно-волновых давлений. Исследования влияния ударно-волновых давлений проводились для отдельной гармоники возмущающей силы, которая как функция от координат в проекционной системе x_c, y_c, z_c и времени t определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{ext}(x_c, y_c, 0, t) &= \\ &= P_{ext,0} \cos(k_x x_c) \cos(k_y y_c) \cos(\omega t); \end{aligned}$$

где $P_{ext,0}$ – амплитуда возмущающей силы давления, Па; k_x, k_y – компоненты волнового числа капиллярных волн, m^{-1} ; ω – круговая частота акустических колебаний, s^{-1} .

Для указанного силового воздействия построены асимптотические решения уравнений с граничными условиями (1, 2, 4, 5).

Далее проанализированы профили поверхностных волн в момент достижения максимальной энергии поверхностного натяжения и нулевой скорости в зависимости от длины волны исходного возмущения и радиуса газового пузырька.

Анализ проводился на примере системы вода–воздух при нормальных условиях. Частота силового воздействия (его отдельной рассматриваемой гармоники) составляла 22 кГц.

Первоначально было проанализировано формирование поверхностных волн при различных радиусах пузырька. Цветные распределения функции h_c представлены на рисунке 2. Распределения построены для области $x_c = -0,6 \text{ мм} \dots 0,6 \text{ мм}$; $y_c = -0,6 \text{ мм} \dots 0,6 \text{ мм}$. Каждому значению величины h_c соответствует собственный цвет из палитры цветов радуги. Зелёный цвет соответствует нулевому значению. Красный цвет соответствует положительному значению. Синий цвет соответствует отрицательному значению. Модуль волнового числа капиллярной волны составляет 1,1 от резонансного значения.

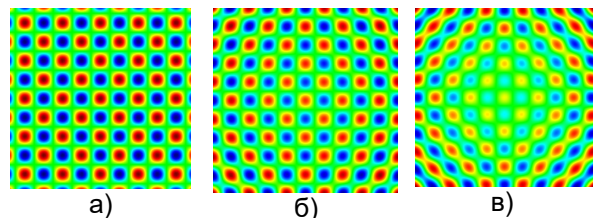


Рисунок 2 – Цветные распределения поверхностных возмущений при различных радиусах кривизны: а) бесконечный радиус (плоская поверхность), б) 3 мм, в) 2 мм

Figure 2 - Coloured distributions of surface disturbances at different radii of curvature: a) infinite radius (flat surface), b) 3 mm, c) 2 mm

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ИСКАЖЕНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН, ОБРАЗУЕМЫХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАВИТАЦИИ

Согласно представленным цветным распределениям, искажение является существенным уже при радиусе, более чем в 10 раз превышающем резонансную длину капиллярной волны на частоте 22 кГц (3 мм много больше 200 мкм). При этом амплитуда оказывается уменьшенной в центре возбуждения капиллярной волны.

Далее представлены цветные распределения профилей капиллярной волны при различных волновых числах (радиус сферы равен 2 мм).

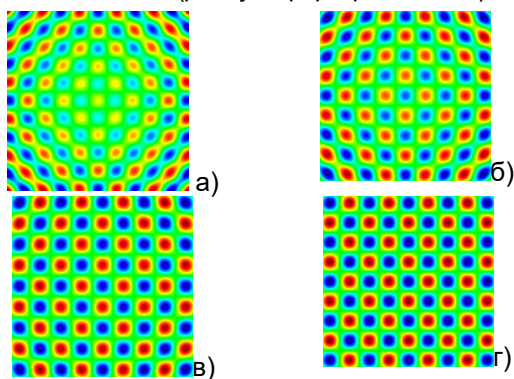


Рисунок 3 – Цветные распределения поверхностных возмущений при различных волновых числах: а) 1,1 от резонансного; б) 1,05 от резонансного; в) 1,03 от резонансного; г) 1,01 от резонансного

Figure 3 - Coloured distributions of surface disturbances at different wave numbers

Согласно представленным цветным распределениям, приближение длины волны во внешней силе к резонансной уменьшает искажения. Однако в реальном процессе искажения профиля волн, вызванные кривизной сферической поверхности, всё равно необходимо учитывать, поскольку спектр ударной волны (в пространстве и во времени) является широким (близок к «белому шуму»).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена гидродинамическая модель формирования капиллярных волн с учётом искажений, вызванных формой сферической поверхности. Разработан алгоритм приближённого аналитического решения уравнения, основанный на асимптотическом разложении по средней кривизне поверхности. Установлено, что искажения начальной поверхности в виде сферической кривизны не влияют на длину формируемых волн, однако приводят к локальной пространственной модуляции амплитуды вдоль поверхности.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare that there is no conflict of interest.

Статья поступила в редакцию 30 октября 2023; одобрена после рецензирования 29 февраля 2024; принята к публикации 06 мая 2024.

The article was received by the editorial board on 30 Oct 2023; approved after editing on 29 Feb 2024; accepted for publication on 06 May 2024.

Искажение является существенным уже при радиусе, более чем в 10 раз превышающем резонансную длину капиллярной волны на частоте 22 кГц (3 мм много больше 200 мкм). При этом амплитуда оказывается уменьшенной в центре возбуждения капиллярной волны.

Приближение длины волны внешней возмущающей силы к резонансной для данной частоты уменьшает искажения.

Однако в реальном процессе искажения профиля волн, вызванные кривизной сферической поверхности, всё равно необходимо учитывать, поскольку спектр ударной волны (в пространстве и во времени) является широким (близок к «белому шуму»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Yusof, N.S.M., Anandan, S., Sivashanmugam, P., Flores, E.M.M. & Ashokkumar, M. (2019). A correlation between cavitation bubble temperature, sonoluminescence and interfacial chemistry. *Ultrasonics Sonochemistry*, 85, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2022.105988>.
2. Krasil'nikov, V.A. & Krylov, V.V. (1984). *Introduction to physical acoustics*. Nauka. 403 c. (in russ.).
3. Golykh, R.N. (2020). Increasing the efficiency of ultrasonic oscillations on the processes in systems with liquid phase : autoref. dis. ... kand. tehn. nauk. (in russ.).
4. Naidji, B., Hallez, L., Taouil, A.E., Rebetez, M. & Hihn, J.-Y. (2017). Influence of pressure on ultrasonic cavitation activity in room temperature ionic liquids: An electrochemical study. *Ultrasonics Sonochemistry*, 54, 129-134. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2019.02.007>.
5. Mamvura, T.A., Iyuke, S.E. & Paterson, A.E. (2020). Energy changes during use of high-power ultrasound on food grade surfaces. *South African Journal of Chemical Engineering*, 62-73. <https://doi.org/10.1016/j.sajce.2017.12.001>.
6. Zhao, S., Yao, C., Zhang, Q., Chen, G. & Yuan, Q. (2019). Acoustic cavitation and ultrasound-assisted nitration process in ultrasonic microreactors: The effects of channel dimension, solvent properties and temperature. *Chemical Engineering Journal*, 374, 68-78. <https://doi.org/10.1016/j.cej.2019.05.157>.
7. King, W.G., Lee, M.D., Affam, A.C., Chung, W.C., Swee, I.W.C. & Adebayo, J.O. (2019). Application of hybrid ultrasonic cavitation/adsorption and coagulation for treatment of palm oil mill effluent. *Nucleation and Atmospheric Aerosols*. <https://doi.org/10.1063/1.5117068>.

Информация об авторах

Р. Н. Голых – д.т.н., профессор кафедры «Методов и средств измерений и автоматизации» БТИ АлтГТУ.

В. Д. Минаков – аспирант БТИ АлтГТУ.

Information about the authors

R.N. Golykh - Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of "Methods and Means of Measurement and Automation" of BTI AltSTU.

V.D. Minakov - postgraduate student of BTI AltSTU.